ANALISI MATEMATICA II 11 Luglio 2022

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.. Corso di Laurea: ◊ AMBLT ◊ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 75 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{3x^2+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date.

(a) f è continua in $(0,0)$ (b) esistono tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ (*Si suggerisce di calcolare le derivate parziali separatamente*) (c) vale la formula $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ per ogni versore $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^2$ (d) f è differenziabile in $(0,0)$

Punti: 7

---

2. Il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \leq z \leq 2\sqrt{x^2+y^2}\;\right\}$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{3}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{4\pi}{3}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{8\pi}{3}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{2\pi}{3}$ $\boxed{\text{E}}$: 4π

Punteggio: 6

---

3. Sia $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ la successione di funzioni data da

$$f_n(x) = \left(\sqrt{n^2+n^\alpha} - n\right)\,\log\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right), \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Determinare al variare di α, per $0 \leq \alpha \leq 1$, il suo insieme di convergenza puntuale e uniforme.

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1.

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni. Si supponga che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sia totalmente convergente in I.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Per ogni $x \in I$ fissato, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ è convergente.

(b) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ è uniformemente convergente in I.

(c) La successione $\{f_n\}$ è uniformemente convergente in I alla funzione nulla.

Punteggio: 6

Domanda 2.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto semplicemente connesso. Sia Γ una curva regolare a tratti a valori in A, semplice, chiusa e percorsa in senso antiorario. Sia $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da

$$\vec{F}(x, y) = (2xe^{-y^2} - y)\,\vec{i}_1 - 2x^2ye^{-y^2}\,\vec{i}_2\,.$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) $\displaystyle\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma = \mathcal{A}\,,$ dove $\mathcal{A}$ denota l'area della regione piana interna a Γ;

(b) $\vec{F}$ è conservativo in A.

Punteggio: 4
